2次元平衡状態におけるプラズマの境界決定の逐次近似法(MHD数値計算とその周辺)

河原田, 秀夫; 花田, 孝郎; 今井, 仁司

数理解析研究所講究録
532巻 1984年 146-162

2次元平衡状態におけるプラズマの境界決定の逐次近似法

千葉大・工・河原田 秀夫
(Hideo KAWARADA)
電通大・工・花田 孝郎
(Takao HANADA)
東京大・工・今井 仁司 (M1)
(Hitoshi IMAI)

§0. 序

2次元平衡状態におけるプラズマの形状決定問題が自由境界値問題になることはよく知られたことである。数値的に解くために、COLLETE GUILLOPE: "Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas" に従って、設定された領域を逐次変形(修正)していくことにより求める方法をとることにする。変形(修正)量をいかにして求めるかということが問題になってくるが、近似問題を考え領域変形に関して微分を行なうことにより変形(修正)量を求める。この反復法の収束性について C. GUILLOPE では示されておらず、現在研究中である。以下 C. GUILLOPE の論文をまとめておく。

§1. 平衡状態におけるプラズマの方程式

Ω を $\mathbb{R}^2$ の有界領域とし、その境界 Γ は C^4 級であるとす

る．そして

$$0 < x_* \leq x_1 \leq x_{**}, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega$$

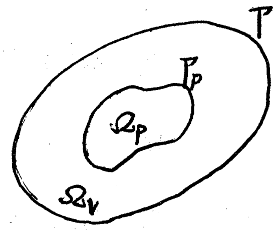
とする．そして自己共役作用素$\mathcal{L}$を次のように定義する．

$$\mathcal{L}u = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_i}u\right)$$

これは$\overline{\Omega}$で楕円型である．

真空容器の中にある平衡状態のプラズマは次の方程式系によって記述される．求めるのはΩ_pとFである．

$$\begin{cases}
\mathcal{L}F = -\lambda\left(\frac{1}{x_1} + \beta x_1\right)F & \text{in } \Omega_p & (1.1)\\
\mathcal{L}F = 0 & \text{in } \Omega_v = \Omega \setminus \overline{\Omega_p} & (1.2)\\
F = 0 & \text{on } \Gamma_p = \partial\Omega_p & (1.3)\\
\frac{\partial}{\partial \nu}F \text{ は連続} & \text{on } \Gamma_p & (1.4)\\
F = const = a \quad (\text{未知}) & \text{on } \Gamma & (1.5)\\
\int_{\Gamma_p} \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial \nu}F\, dl = I & & (1.6)\\
F \neq 0 & \text{in } \Omega_p & (1.7)
\end{cases}$$



ここで$\overline{\Omega_p} \subset \Omega$で$\Omega_p$はプラズマが存在する領域で$\Omega_v$は真空領域である．また$I$は与えられた正定数で，$a$は定数であるが未知である．$\beta$は与えられた正定数でポロイダル係数と呼ばれるものである．$\frac{\partial}{\partial \nu}$は法線微分を表わす．この問題を"exactな問題"と呼ぶことにする．

次から簡単のために

$$\sigma(x) = \frac{1}{x_1} + \beta x_1, \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \overline{\Omega}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial \nu}$$

とする．すると σ_0，$\sigma_1 > 0$ が存在して

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_1 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}$$

であることは容易である．

<u>Rem 1.1</u>

(1.7) より F_p を F の Ω_p 上への制限とすると F_p の符号は Ω_p 上一定である．また λ は最小固有値である．■

<u>Lemma 1.2</u>

$a > 0$，$F > 0$ in Ω_v，$F < 0$ in Ω_p である．従って

$$\Omega_p(F) = \{ x \in \Omega \mid F(x) < 0 \}$$

$$\Omega_v(F) = \{ x \in \Omega \mid F(x) > 0 \}$$

$$\Gamma_p(F) = \{ x \in \Omega \mid F(x) = 0 \}$$

である．■

<u>Theo 1.3</u>（解の存在）

与えられた定数 c に対して，$c^2 = \int_\Omega \sigma(x)\,[F_-(x)]^2\,dx$ をみたす $\{F\}$ の中で少なくとも (1.1) ～ (1.7) をみたすものが存在する．ここで F_- は F の負の部分を表わす．また F は

$$F \in W^{3,\alpha}(\Omega) \quad \forall \alpha \geq 1, \qquad F \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \quad 0 \leq \gamma < 1$$

である. ■

従って今後は与えられた C に対し

(1.8) $\quad C^2 = \int_\Omega \sigma \, [F]^2 \, dx$

をみたす $\{F\}$ の中で "exact な問題" の解を探すことにする.

<u>Theo 1.4</u> (解の一意性)

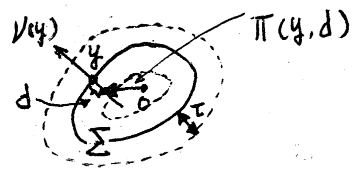
ある実数 $\tau > 0$ が存在して, $I/C < \tau$ ならば "exact な問題" の解は一意である. ■

§2. 領域変形に関して

$\mathbb{R}^2$ の C^2 級の閉曲線群 $\mathcal{H}$ を考え, それに位相を入れることを考える. 位相を定義する前に次のことを Lemma としてあげておく.

<u>Lemma 2.1</u>

Σ を $\mathbb{R}^2$ のコンパクトな C^3 級の閉曲線とする. もし $\tau > 0$ が十分小さければ写像



$$\Pi : \Sigma \times]-\tau, \tau[\longmapsto \mathbb{R}^2$$

は C^2-diffeomorphism になる. ここで Π は Σ 上の点 y, $d \in]-\tau, \tau[$ に対して $\Pi(y, d)$ を y における Σ の外向き法線:

$V(y)$ 上のyから距離dのところにある点を表わすことで定義される。■

さて$\mathcal{H}$に位相を入れるために開集合を定義する．その前にC^3あるいはC^2級の写像$X : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$を考え$S^1$を$\mathbb{R}^2$の単位円として閉曲線とは$X$による$S^1$の像と考える．

<u>Def 2.2</u>

$\mathcal{H}$のある元$\overline{\Gamma_P} = \overline{X}(S^1)$の$\varepsilon$-近傍は次で与えられる．

$$V(\overline{\Gamma_P}, \varepsilon) = \{ X(S^1) \mid X \text{ は } C^2 \text{ 級かつ } \|X - \overline{X}\|_{C^2(S^1, \mathbb{R}^2)} < \varepsilon \}$$

ここで$C^n(A, B)$はAからBへのC^n級の写像全体から成るノルム空間とする．■

$\mathcal{H}$に位相を入れたので同相写像が考えられる．そこで

<u>Prop 2.3</u>

$C^2(\overline{\Gamma_P}, \mathbb{R})$の原点近傍から$\mathcal{H}$の$\overline{\Gamma_P}$の近傍$V(\overline{\Gamma_P})$への同相写像$\Xi$

$$\Xi : C^2(\overline{\Gamma_P}, \mathbb{R}) \longmapsto \mathcal{H}$$

が存在する．■

Prop 2.4

Γ_p と $\bar{\Gamma}_p$ が $\mathcal{H}$ で十分近いなら $\gamma = \Xi^{-1}(\Gamma_p)$ として $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$ の2つの双射 $\mathcal{T}$ と $\bar{\mathcal{T}}$ が存在し, $\mathcal{T} = (\bar{\mathcal{T}})^{-1}$, $\bar{\mathcal{T}} = (\mathcal{T})^{-1}$ が成立しその形は

(2.1) $\bar{\mathcal{T}}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{\xi}(\bar{x})$, $\quad \mathcal{T}(x) = x + \xi(x)$

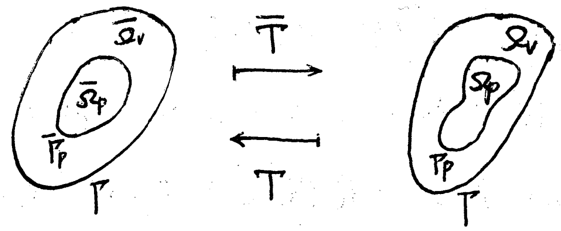
で与えられる. ここで $\bar{\xi}$, ξ は

(2.2) $$\bar{\xi}(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & \text{if } \bar{x} \in C_\Omega \Pi(\bar{\Gamma}_p \times]-\tau, \tau[) \\ \gamma(\bar{y})\, \varphi(d)\, \bar{\nu}(\bar{y}) & \text{if } \bar{x} = \Pi(\bar{y}, d) \in \Pi(\bar{\Gamma}_p \times]-\tau, \tau[) \end{cases}$$

(2.3) $$\varphi(d) = \begin{cases} 0 & \text{if } d \in (]-\tau, -\tau_1[) \cup (]\tau_1, \tau[) \\ e \cdot \exp\left(-\dfrac{1}{(1 - d^2/\tau_1^2)}\right) & \text{if } d \in]-\tau_1, \tau_1[\end{cases}$$

である. $C_\Omega \Pi$ は Ω における Π の補集合を表す.

すると $\mathcal{T}$, $\bar{\mathcal{T}}$ による対応する点 x, $\bar{x}$ では



(2.4) $\xi(x) = -\bar{\xi}(\bar{x})$

が成立し $\mathcal{T}$, $\bar{\mathcal{T}}$ は Ω, Γ を変えないで $(\bar{\Omega}_p, \bar{\Gamma}_p, \bar{\Omega}_v)$ と $(\Omega_p, \Gamma_p, \Omega_v)$ を対応させる. ■

§3. 近似問題の線形化

"exactな問題"を直接解くのは難かしいから, 自由境界上での微係数の接続条件を除いた問題を近似問題とする. 今

$\bar{\Omega}_p$を固定し $\theta \in C_0^2(Q)$ $(\Omega \subset Q)$ に対して，$\Omega_p = (I+\theta)\bar{\Omega}_p$ 及び $\Omega_v = (I+\theta)\bar{\Omega}_v$ と表わされている領域で次の近似問題を考える．

$$\begin{cases} \mathcal{L} F_p(\Omega_p) = -\lambda(\Omega_p)\,\sigma F_p(\Omega_p) & \text{in } \Omega_p & (3.1) \\ F_p(\Omega_p) = 0 & \text{on } \Gamma_p & (3.2) \\ \lambda(\Omega_p)\int_{\Omega_p} \sigma F_p(\Omega_p)\,dx = -I & & (3.3) \\ F_p(\Omega_p) \neq 0 & \text{on } \Omega_p & (3.4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L} F_v(\Omega_v) = J & \text{in } \Omega_v & (3.5) \\ F_v(\Omega_v) = 0 & \text{on } \Gamma_p & (3.6) \\ F_v(\Omega_v) = \text{const} & \text{on } \Gamma & (3.7) \\ \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial \nu(\Omega_v)} F_v(\Omega_v)\,dl = I & & (3.8) \end{cases}$$

ここで $J \in L^2(\Omega)$ とする．

当然一般にはこの2つの解 $F_p(\Omega_p)$，$F_v(\Omega_v)$ の法線方向の微係数は Γ_p 上で接続されない．接続されるように θ を定めたい．また数値計算のためには θ をあらわに求めなくてはいけない．そこで近似問題を θ に関して微分することを考える．$\bar{F}_p(0) = F_{0p}$，$\bar{F}_v(0) = F_{0v}$，$\bar{\lambda}(0) = \lambda_0$ （即ち $\bar{\Omega}_p$，$\bar{\Omega}_v$ で (3.1)～(3.8)を解いたときの解と固有値）とする．$V_0(\Omega_v)$ を $H^1(\Omega_v)$ に属し Γ_p 上0で Γ 上定数であるような関数の集合とする．$\forall \xi \in C_0^2(Q)$ に対して

$$Y_p(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}\bar{F}_p(0)\cdot\xi \quad , \quad Y_v(\xi) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta}\bar{F}_v(0)\cdot\xi$$

とおくと $Y_p \in H_0^1(\bar{\Omega}_p) \cap H^2(\bar{\Omega}_p)$, $Y_v \in V_0(\bar{\Omega}_v)$ である．また

$$G_p(\xi) \equiv Y_p(\xi) - \nabla F_{0p} \cdot \xi \quad , \quad G_v(\xi) \equiv Y_v(\xi) - \nabla F_{0v} \cdot \xi$$

とおくと (3.1)〜(3.8) を θ に関して微分したものは $G_p(\xi)$, $G_v(\xi)$ に関する方程式になり

$$\begin{cases} -\mathcal{L}\, G_p(\xi) - \lambda_0 \sigma_p G_p(\xi) = \dfrac{\lambda_0^2}{I} \left(\displaystyle\int_{\bar{\Omega}_p} \sigma_p G_p(\xi)\, dx \right) \sigma_p F_{0p} & \text{in } \bar{\Omega}_p & (3.9) \\ \mathcal{L}\, G_v(\xi) = 0 & \text{in } \bar{\Omega}_v & (3.10) \\ G_p(\xi) + (\xi \cdot \nu) \dfrac{\partial}{\partial \nu} F_{0p} = G_v(\xi) + (\xi \cdot \nu) \dfrac{\partial}{\partial \nu} F_{0v} = 0 & \text{on } \bar{\Gamma}_p & (3.11) \\ G_v(\xi) = \text{const} & \text{on } \Gamma & (3.12) \\ \displaystyle\int_{\bar{\Gamma}_p} \dfrac{\partial}{\partial \nu_L} G_p(\xi)\, dl = \int_{\bar{\Gamma}_p} \dfrac{\partial}{\partial \nu_L} G_v(\xi)\, dl = 0 & & (3.13) \end{cases}$$

となる．それ以上に $G_p(\xi) \in H^2(\bar{\Omega}_p)$, $G_v(\xi) \in H^2(\bar{\Omega}_v)$ である．ここで σ_p は

$$\sigma_p = \begin{cases} \sigma & \text{in } \bar{\Omega}_p \\ 0 & \text{in } \Omega \setminus \bar{\Omega}_p \end{cases}$$

とする．

§4. ξ の決定のために

領域の変形量 ξ は (2.2) でみたように $\bar{\Gamma}_p$ 上で $\xi \cdot \nu = \gamma$ が与えられれば決まり，従って求めるのはスカラー関数 γ でよいことに注意しておく．§1 から $c^2 = \int_{\bar{\Omega}_p} \sigma_p [F_p]^2 dx$ をみたす $\{F\}$ の中で解を探すことと，F_p と F_v の法線微分接続を ξ の決定条件にする．才一の条件からは

(4.1) $\displaystyle\int_{\Omega_p} \sigma_p\, G_p(\xi)\, F_{0p}\, dx = 0$.

オ二の条件について少し詳しく述べると

$$l(\xi) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial n} F_p - \frac{\partial}{\partial n} F_v\right)(I+\xi)\Big|_{\Gamma_p} \longmapsto \text{小}$$

ということになる．ξをγにかえてlの微分を求めると

$$\Big\| l(\gamma) - l(0) - \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial n} G_p(\gamma) - \frac{\partial}{\partial n} G_v(\gamma)\Big) + \frac{1}{R}\,\gamma\cdot\Big(\frac{\partial}{\partial n} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial n} F_{0v}\Big)\Big]\Big\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_p)} = o(\|\gamma\|).$$

ここで R は Γ_p の曲率半径，$H^{\frac{1}{2}}$ は Trace space である．$l(0) = g$ とおき，今 $\|\frac{\partial}{\partial n} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial n} F_{0v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_p)} = O(1)$ と仮定すると

(4.2) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial n} G_p(\gamma) - \frac{\partial}{\partial n} G_v(\gamma) = -g$

とおくことにより $\|l(\gamma)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_p)} = o(\|\gamma\|)$ となり，もし $\|\gamma\| \mapsto 0$ なら $\|l(\gamma)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_p)} \mapsto 0$ となってくれる．

以上γを決定するために (3.9)～(3.13)，(4.1) (4.2) をまとめると

$$\begin{cases}
-\mathcal{L} G = \lambda_0 \sigma_p G + \dfrac{\lambda_0^2}{I}\left(\displaystyle\int_{\Omega_p} \sigma_p G\, dx\right)\sigma_p F_0 & \text{in } \Omega_p & (4.3)\\
\mathcal{L} G = 0 & \text{in } \Omega_v & (4.4)\\
G_p = G_v & \text{on } \Gamma_p & (4.5)\\
\dfrac{\partial}{\partial n} G_p - \dfrac{\partial}{\partial n} G_v = -g & \text{on } \Gamma_p & (4.6)\\
G_v = \text{const} & \text{on } \Gamma & (4.7)\\
\displaystyle\int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial n} G_p\, dl = \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial n} G_v\, dl = 0 & & (4.8)\\
\displaystyle\int_{\Omega_p} \sigma_p F_0 G_p = 0 & & (4.9)
\end{cases}$$

ここで，$g = \frac{\partial}{\partial n} F_{0p} - \frac{\partial}{\partial n} F_{0v}$ である．この G_p，G_v を使ってγ

を

(4.10) $\quad \gamma = \xi \cdot \nu = - G_p \Big/ \left(\frac{\partial}{\partial l} F_{0p} \right) \qquad \text{on } \overline{\Gamma_p}$

で定義することができる.

　ところが G_p, G_v は $\overline{\Gamma_p}$ 上で連続でないこともあるし (4.3)〜(4.10) を直接数値計算しようとすると大変である. そこで $\mathcal{F}$ を

(4.11) $\quad \mathcal{F} \equiv F_0 + G \qquad \text{on } \Omega$

で定義すると $\mathcal{F}$ は $\overline{\Gamma_p}$ 上連続となりこの $\mathcal{F}$ を考えることにより数値計算は楽になる. これからは λ_0 のかわりに λ と書き, $\overline{\Omega_p}$, $\overline{\Gamma_p}$, $\overline{\Omega_v}$ を単純に Ω_p, Γ_p, Ω_v と書くことにする. すると $\mathcal{F}$ のみたす式は

(4.12) $\quad \mathcal{L}\mathcal{F} = -\lambda \sigma_p \mathcal{F} - \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_\Omega \sigma_p \mathcal{F} \, dx \right) \sigma_p F_0 - \lambda \sigma_p F_0 \qquad \text{in } \Omega_p$

(4.13) $\quad \mathcal{L}\mathcal{F} = J \qquad \text{in } \Omega_v$

(4.14) $\quad \mathcal{F}_p = \mathcal{F}_v \qquad \text{on } \Gamma_p$

(4.15) $\quad \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{F}_p = \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{F}_v \qquad \text{on } \Gamma_p$

(4.16) $\quad \mathcal{F} = const \qquad \text{on } \Gamma$

(4.17) $\quad \int_{\Gamma_p} \frac{\partial}{\partial l} \mathcal{F} \, dl = I$

である. $W \equiv \{ f \in H^1(\Omega) \,,\; f = const \ \text{on } \Gamma \}$ とすると上を弱形式にして

Prob 4.1

　任意の $\phi \in W$ に対して次をみたす $\mathcal{F} \in W$ を求めよ.

$$(4.18)\quad \int_\Omega \frac{1}{x_1}\nabla\psi\cdot\nabla\phi\,dx = \lambda\int_\Omega \sigma_p\psi\phi\,dx + \frac{\lambda^2}{I}\left(\int_\Omega \sigma_p\psi\,dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0\phi\,dx\right) + \lambda\int_\Omega \sigma_p F_0\phi\,dx - \int_\Omega J\phi\,dx + I^*\phi(\Gamma)$$

ここで

$$(4.19)\quad I^* = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n}\psi\,dl = \int_\Omega J\,dx + I$$

である. ■

ここでもう少し Prob 4.1 について詳しく調べてみる. $H = L^2(\Omega)$ とおく. bilinear 形式を

$$(4.20)\quad a_0(\psi,\phi) \equiv \int_\Omega \frac{1}{x_1}\nabla\psi\cdot\nabla\phi\,dx \qquad \forall(\psi,\phi)\in W\times W$$

$$(4.21)\quad b_0(\psi,\phi) \equiv \int_\Omega \sigma_p\psi\cdot\phi\,dx + \frac{\lambda}{I}\left(\int_\Omega \sigma_p\psi\,dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0\phi\,dx\right) \qquad \forall(\psi,\phi)\in H\times H$$

で定義する. ところが a_0 は $H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ では coercive になるが $W\times W$ では coercive にならない. そこで次の bilinear 形式を定義する.

$$(4.22)\quad a(\psi,\phi) \equiv a_0(\psi,\phi) + \lambda\int_\Omega \sigma_p\psi\phi\,dx \qquad \forall(\psi,\phi)\in W\times W$$

$$(4.23)\quad b(\psi,\phi) \equiv b_0(\psi,\phi) + \int_\Omega \sigma_p\psi\phi\,dx \qquad \forall(\psi,\phi)\in H\times H$$

すると a は $W\times W$ で coercive になる. また

$$(4.24)\quad \langle \ell,\phi\rangle \equiv \lambda\int_\Omega \sigma_p F_0\phi\,dx - \int_\Omega J\phi\,dx + I^*\phi(\Gamma) \qquad \forall\phi\in H_\Gamma$$

と定義する. ここで H_Γ は H の関数で Γ 上定数のものを示す. Prob 4.1 は次と同等である.

Prob 4.2

(4.25) $\quad a(\mathcal{F},\phi)=\lambda b(\mathcal{F},\phi)+\langle \ell,\phi\rangle \qquad \forall\phi\in W$

となる $\mathcal{F}\in W$ を求めよ．■

これに付随して次の問題を考える．

Prob 4.3

(4.26) $\quad a_0(F,\phi)=\lambda b_0(F,\phi)+\langle \hat{h},\phi\rangle \qquad \forall\phi\in H_0^1(\Omega)$

となる $F\in H_0^1(\Omega)$ を求めよ．ここで

(4.27) $\quad \langle \hat{h},\phi\rangle\equiv\lambda\int_\Omega\sigma_p\phi\,dx+\frac{\lambda^2}{I}\left(\int_\Omega\sigma_p\,dx\right)\left(\int_\Omega\sigma_p F_0\phi\,dx\right)$

である．■

(4.28) $\quad a_0(\psi,\phi)\equiv\langle A_0\psi,\phi\rangle,\quad b_0(\psi,\phi)\equiv\langle B_0\psi,\phi\rangle$

とおくと，A_0 は $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ から H へ同型写像となる．また

(4.29) $\quad a(\psi,\phi)\equiv\langle A\psi,\phi\rangle,\quad b(\psi,\phi)\equiv\langle B\psi,\phi\rangle$

とおくと A は W から W' へ同型写像となる．すると Prob 4.2 は次と同等である．

Prob 4.4

(4.30) $\quad \mathcal{F}=\lambda K\mathcal{F}+h$

となる $\mathcal{F}\in H$ を求めよ．ここで $K\equiv A^{-1}B$，$h\equiv A^{-1}\ell$ である．

■

また Prob 4.3 は次と同等である.

Prob 4.5

(4.31) $\quad \tilde{F} = \lambda K_0 \tilde{F} + h_0$

となる $\tilde{F} \in H$ を求めよ. ここで $K_0 \equiv A_0^{-1} B_0$; $h_0 \equiv A_0^{-1} \tilde{h}$ である. ■

K, K_0 が H においてコンパクト作用素になることに留意して Fredholm の択一定理を使うことにする. その前に数値的経験から次のことを仮定する.

[仮定]

$1/\lambda$ は K_0 の固有値ではない. ■

Theo 4.6

$1/\lambda$ が K_0 の固有値でないなら $1/\lambda$ は K の固有値となり, 固有空間 $E(K, 1/\lambda)$ は1次元である. しかも $\tilde{F}$ を Prob 4.5 の解とすると $E(K, 1/\lambda) = \mathbb{R}(\tilde{F}+1)$ である.

(証) 簡単に, $W = H_0^1(\Omega) + \mathbb{R}\cdot 1(\Omega)$ ($1(\Omega)$ は $\bar{\Omega}$ 上 1 であ

ること）に注意すると，$1/\lambda$ が K_0 の固有値でないから Prob 4.5 が $H_0^1(\Omega)$ で一意解 $\bar{F}$ をもち (4.26) を変形すると，

$$a(\bar{F}+1,\phi) = \lambda\, b(\bar{F}+1,\phi) \qquad \forall\phi \in H_0^1(\Omega)$$

となる．また恒等式

$$a(\bar{F}+1,1) = \lambda\, b(\bar{F}+1,1)$$

より

$$a(\bar{F}+1,\phi) = \lambda\, b(\bar{F}+1,\phi) \qquad \forall\phi \in W$$

が得られる．■

Theo 4.7

$1/\lambda$ が K の固有値で重複度が 1 なられは $E(K^*, 1/\lambda)$ に直交し $\mathcal{F}_0$ を Prob 4.1 の1つの解とすると Prob 4.1 の解は

(4.32) $$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_0 + s\bar{F} \qquad \forall s \in R$$

となる．ここで K^* は K の随伴作用素で $F \in E(K, 1/\lambda)$ である．■

以上で Prob 4.1 の解の形がわかった．$\mathcal{F} = \bar{F} + 1$ であり，$\bar{F}$ は Prob 4.3 の解であるから求まるが問題は $\mathcal{F}_0$ を具体的に1つ見つけることである．そこで Prob 4.1 の解で Γ 上 1 であるものを求める．

(4.33) $$\mathcal{F} = \bar{F} + \bar{H} + 1 \quad , \quad \bar{H} \in H_0^1(\Omega)$$

とおいて (4.18) 式に代入し，$\phi \in W$ を新たに $\phi + \mathbb{R}\cdot 1(\Omega)$ （$\phi \in H^1_0(\Omega)$）とおいて (4.18) 式に代入し，$\int_\Omega \sigma_p F_0\, dx = -\frac{I}{\lambda}$ に注意して変形すると $\overline{H}$ の方程式は

<u>Prob 4.8</u>

$\forall \phi \in H^1_0(\Omega)$ に対し

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu_1} \nabla \overline{H} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \sigma_p \overline{H} \phi \, dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_\Omega \sigma_p \overline{H} \, dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0 \phi \, dx\right) + \lambda \int_\Omega \sigma_p F_0 \phi \, dx - \int_\Omega J \phi \, dx \tag{4.34}$$

をみたす $\overline{H} \in H^1_0(\Omega)$ を求めよ．■

となる．これは $1/\lambda$ が K_0 の固有値でなければ一意解をもつ．
以上のことをまとめてみると

<u>Theo 4.9</u>

$1/\lambda$ が K_0 の固有値でなければ Prob 4.1 の解は

$$F_\eta = \overline{H} + \eta(\overline{F} + 1) \qquad \eta \in R \tag{4.35}$$

と表わされる．ここで $\overline{F}$，$\overline{H}$ は $\forall \phi \in H^1_0(\Omega)$ に対し次をみたす．

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu_1} \nabla \overline{F} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \sigma_p \overline{F} \phi \, dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_\Omega \sigma_p \overline{F} \, dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0 \phi \, dx\right) + \lambda \int_\Omega \sigma_p \phi \, dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_\Omega \sigma_p \, dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0 \phi \, dx\right) \tag{4.36}$$

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu_1} \nabla \overline{H} \cdot \nabla \phi \, dx = \lambda \int_\Omega \sigma_p \overline{H} \phi \, dx + \frac{\lambda^2}{I} \left(\int_\Omega \sigma_p \overline{H} \, dx\right)\left(\int_\Omega \sigma_p F_0 \phi \, dx\right) \tag{4.37}$$

$$+\lambda\int_{\Omega}\sigma_p F_0\,\phi\,dx-\int_{\Omega}J\phi\,dx \quad . \blacksquare$$

ところで $\mathcal{F}$ の定義より $\mathcal{F}=F_0+G$ であるから

(4.38) $$G_\gamma=\overline{H}-F_0+\gamma\,(\overline{F}+1)$$

である．この γ を定めることを考える．

(4.39) $$C_0^2=\int_{\Omega_p}\sigma_p F_0^2\,dx$$

とおく．本来なら $\int_{\Omega_p}\sigma_p F_0 G_\gamma\,dx=0$ であるが

(4.40) $$\int_{\Omega}\sigma_p F_0 G_\gamma\,dx=\frac{C^2-C_0^2}{2}$$

と近似する．すると

(4.41) $$\int_{\Omega}\sigma_p F_0\,\mathcal{F}_\gamma\,dx=\frac{C^2+C_0^2}{2}$$

である．ゆえに

(4.42) $$\gamma=\left[\frac{C^2+C_0^2}{2}-\int_{\Omega_p}\sigma_p F_0\overline{H}\,dx\right]\Big/\left[\int_{\Omega_p}\sigma_p(\overline{F}+1)F_0\,dx\right]$$

となる．これから Υ が

(4.43) $$\Upsilon\equiv-\left(\mathcal{F}_\gamma\Big/\frac{\partial}{\partial\nu}F_{0p}\right)\qquad \text{on } \Gamma_p$$

で定義できることになる．この Υ によって Ω_p を逐次変形させてゆく．最後にこの逐次近似の妥当性に関する定理を述べておく．

<u>Theo 4.10</u>

上の Υ による Ω_p の変形に関して Ω_p^n と Ω_p^{n+1} が理論的に一致したとき，近似問題の解 $(\Omega_p^n, F_0^n, \lambda^n)$ は "exact な問題"

の解となっている。■

参考文献

COLLETE GUILLOPE, Thèse de 3ème cycle, Université de Paris XI, 1977, "Sur un problème à frontière libre intervenant en physique des plasmas"